Desafío 85. Amaños (Dospew)

La mafia se pasa a las carreras de caracoles y diseña una pista ganadora; conocerán de forma previa distancia, duración y velocidades. Tendrán a qué apostar sobre seguro.

Adquieren por una millonada una cuadra de caracoles – caros, porque todos tienen velocidades distinta (Sin doblar el más veloz al más lento). Se etiquetan con un número que es su velocidad en mm/s. En competición ajustan sus velocidades hasta lograr una fracción irreductible entre sus números. (fracción >1).

Se diseña un circuito con un tramo curvo-fijo, consistente en un semicírculo y un tramo recto-extensible-variable. Tendrá dos pistas-carril de 6 cm. de anchura cada una.

Los caracoles se mueven siempre a velocidad constante, en línea recta y por el centro de su calle. En la salida se coloca en la pista de mayor longitud al caracol con mayor velocidad.

Se eligen dos caracoles cualesquiera y se facilita su relación de números, k y automáticamente se extiende la pista flexible hasta una longitud L, que garantiza la llegada a meta al unísono (tramposos).

Las carreras, evidentemente, se amplían en pantalla gigante.

En la carrera inaugural se eligen dos caracoles con k= 1,025.

1.- ¿Cuánto deberá extenderse el circuito para que lleguen empatados a meta?

2.- ¿A qué velocidades han corrido y cuánto duró la carrera?

Solución.

1.- ¿Cuánto deberá extenderse el circuito para que lleguen empatados a meta?

La necesaria para que la longitud total (tramo semicircular + tramo recto) de la pista exterior (L_A, recorrida por el caracol rápido) y la longitud total de la interior (L_B, recorrida por el lenteo) tengan estos valores:

$$L_A = 2460\,\pi$$

$$L_B = 2400\,\pi$$

La parte que se extiende, que llamaremos L_{AB} tendrá una longitud dada por esta expresión:

$$L_{AB} = \frac{60\,\pi - \pi\,R\,(k_{AB} - 1)}{k_{AB} - 1} = \frac{60\,\pi}{k_{AB} - 1} - \pi\,R$$

Para los datos del enunciado:

$$k_{AB} = 1{,}025 = \frac{41}{40}$$

$$L_{AB} = 2400\,\pi - \pi\,R$$

Vemos que esta expresión depende de R, que usamos para denominar el radio de la línea central de la pista interior (la recorrida por el más lento), y que debe tener un valor entre 30 y 60 mm. Para la imagen del enunciado, R=30, por lo que la respuesta sería: 2370 π.

2.- ¿A qué velocidades han corrido y cuánto duró la carrera?

Independientemente de R:

$$v_A = 41\,mm/s$$

$$v_B = 40\,mm/s$$

$$t = 60\,\pi\,segundos$$

Demostración.

Sea R el diámetro de la línea central de la pista semicircular recorrida por el caracol más lento. Como la pista tiene 60 mm de ancho, el caracol más rápido recorrerá un tramo semicircular de longitud R+60. Observemos (como curiosidad) que la diferencia D entre ambos tramos semicirculares es constante e independiente de R:

$$D = \pi(R + 60 - R) = 60\,\pi$$

Ahora tomemos dos caracoles, A y B, que se mueven a velocidades v_A y v_B. Supondremos $v_A>v_B$, es decir, que A es más rápido que B y por tanto se mueve por la pista exterior. Llamemos L_A y L_B a las longitudes totales que recorren cada uno, y L_{AB} a la longitud del tramo recto flexible que se ha adaptado a la carrera entre ello. Entonces tenemos:

$$L_A = L_{AB} + \pi\,(R + 60)$$

$$L_B = L_{AB} + \pi\,R$$

Si imponemos que ambos caracoles lleguen a meta en el mismo tiempo t, tendremos:

$$t = \frac{L_A}{v_A} = \frac{L_{AB} + \pi\,(R + 60)}{v_A}$$

$$t = \frac{L_B}{v_B} = \frac{L_{AB} + \pi\,R}{v_B}$$

De ambas ecuaciones, obtenemos una expresión que liga la longitud L_{AB} que se extiende la pista con la relación entre sus velocidades k_{AB} y R:

$$k_{AB} = \frac{v_A}{v_B}$$

$$t = \frac{L_{AB} + \pi\,(R + 60)}{v_A} = \frac{L_{AB} + \pi\,R}{v_B}$$

$$L_{AB} + \pi\,(R + 60) = k_{AB}\,(L_{AB} + \pi\,R)$$

$$\pi\,R + 60\,\pi - \pi\,R\,k_{AB} = (k_{AB} - 1)\;L_{AB}$$

$$L_{AB} = \frac{60\,\pi - \pi\,R\,(k_{AB} - 1)}{k_{AB} - 1} = \frac{60\,\pi}{k_{AB} - 1} - \pi\,R$$

Esto parece indicar que hay múltiples soluciones. Para cada valor de R, tendremos que extender la pista en la longitud dada por la expresión anterior. Sin embargo, veamos que pasa al calcular la distancia recorrida por cada caracol.

$$L_A = L_{AB} + \pi\,(R+60) = \frac{60\,\pi}{k_{AB}-1} - \pi\,R + \pi\,(R+60) = \frac{60\,\pi}{k_{AB}-1} + 60\,\pi = \frac{60\,\pi\;\;k_{AB}}{k_{AB}-1}$$

$$L_B = L_{AB} + \pi\,R = \frac{60\,\pi}{k_{AB}-1} - \pi\,R + \pi\,R = \frac{60\,\pi}{k_{AB}-1}$$

¡¡¡ Ya no depende de R !!!. Es decir, las distancias recorridas EN TOTAL, sumando el tramo semicircular y el recto, son independientes del radio R con que fue diseñado el tramo semicircular de la pista. Ahora podemos calcular los valores pedidos en el desafío:

$$k_{AB} = 1{,}025 = \frac{41}{40}$$

$$L_A = \frac{60\,\pi\;\;k_{AB}}{k_{AB}-1} = \frac{60\,\pi\,\frac{41}{40}}{\frac{41}{40}-1} = 2460\,\pi$$

$$L_B = \frac{60\,\pi}{k_{AB}-1} = \frac{60\,\pi}{\frac{41}{40}-1} = 2400\,\pi$$

Para calcular el tiempo, debemos conocer las velocidades, y no solo su relación. Las velocidades de los caracoles podrían ser cualquier pareja que mantuviera la relación k_{AB}, pero aquí cobra sentido la frase del enunciado "En competición ajustan sus velocidades hasta lograr una fracción irreductible entre sus números". Por tanto:

$$v_A = 41, v_B = 40$$

$$t_A = \frac{L_A}{v_A} = \frac{2460\,\pi}{41} = 60\,\pi$$

$$t_B = \frac{L_B}{v_B} = \frac{2400\,\pi}{40} = 60\,\pi$$

De todas formas, y aunque no lo necesitemos porque no influye en la solución, podemos acotar los valores de R permitidos. Por una parte, no puede ser menor que 30 mm, porque la pista interior no sería construible (para R=30, sería el borde interior se reduciría a un punto). Por otra parte la expresión anterior de LAB tiene que proporcionar una expresión positiva, para cualquier valor de k_{AB}, ya que no tiene sentido una longitud del tramo recto negativa. Es decir:

$$\frac{60\,\pi}{k_{AB}-1} - \pi R > 0$$

$$\frac{60}{k_{AB}-1} > R$$

$$1 < k_{AB} < 2 \rightarrow R < 60$$

$$30 < R < 60$$

Es decir, los mafiosos no pueden diseñar el tramo semicircular con un radio interior mayor que 60, porque en ese caso un caracol con velocidad casi el doble que el otro le sacaría suficiente ventaja como para ganar la carrera. El valor negativo que saldría para L_{AB} se puede interpretar como que haría falta descontar metros a la longitud recorrida para que se igualaran. Pero para cualquier valor de R entre 30 y 60, el problema tiene solución, y es siempre la misma.