

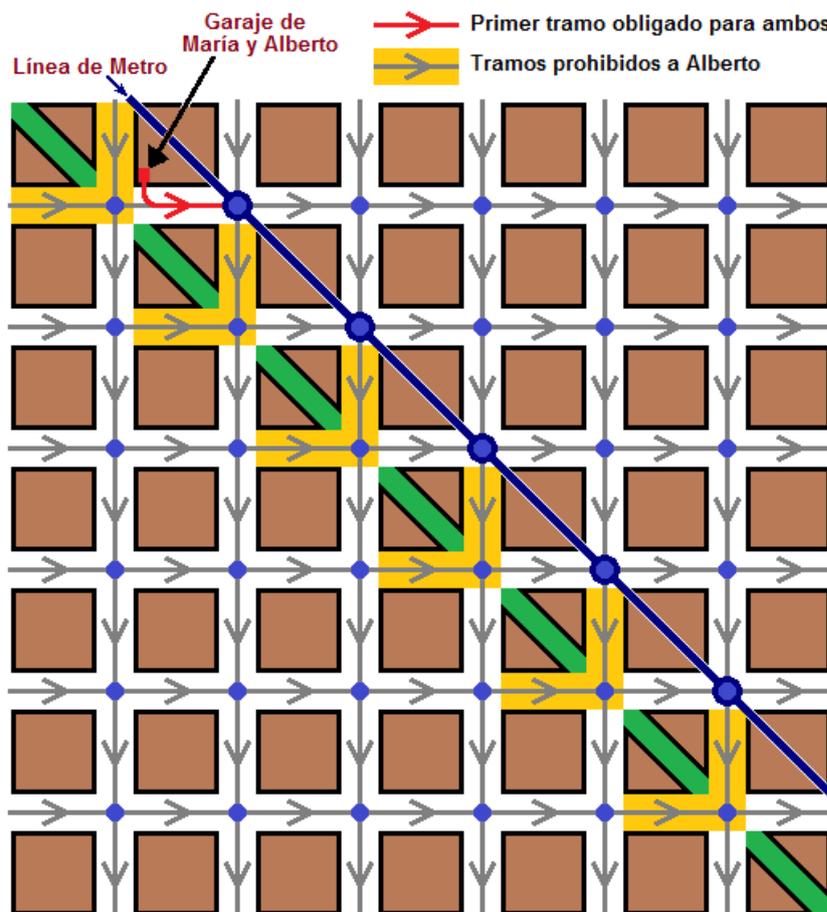
Desafío 60 - Circulando por la ciudad - Tercera parte.

Una ciudad con restricciones de tráfico y una línea de Metro.

Alberto y María viven en una ciudad con las siguientes restricciones de tráfico los domingos:

- Todas las calles serán de sentido único **para todos los vehículos privados: sólo podrá circularse en sentido "Este" en las calles "horizontales" o en sentido "Sur" en las "verticales"**.
- La ciudad cuadriculada tiene una diagonal **peatonal** ajardinada, conocida como "**la diagonal verde**", que recorre la ciudad de noroeste a sureste. Los domingos, estará **prohibido a todos los automóviles el acceso a los tramos de calles que desembocan en un cruce con la diagonal**.

El garaje de la casa de María y Alberto tiene la salida en una calle que deja al Oeste un cruce con la diagonal. Por tanto, pueden salir de su casa los domingos en automóvil, pero **la primera manzana la tendrán que recorrer obligatoriamente hacia el Este**. Este primer tramo obligado está **pintado en rojo en el plano**. La ciudad dispone de una única **línea de Metro**: la Línea Azul, que conecta y tiene parada en todos los cruces contiguos a la diagonal por el Este o Norte.



Una excursión nocturna en Automóvil y Metro.

Es domingo por la noche, y Alberto se dispone a dar al bebé el paseo en automóvil para que se duerma. Como hace mucho frío, decide ir en automóvil y regresar en Metro, para tener que recorrer una sola manzana paseando.

El bebé lleva una temporada en que le cuesta más dormirse, por lo que sus padres saben que el trayecto en automóvil debe ser de 9 manzanas para que el sueño sea suficientemente profundo. En consecuencia, Alberto se dirigirá en coche, siempre respetando las restricciones de tráfico, al cruce que se sitúa 5 manzanas al Este y 4 Manzanas al Sur de su casa. Este cruce dispone de estación de metro, por lo que al llegar Alberto aparcará, meterá al bebé dormido en el carrito, y tomará el Metro hasta una de las estaciones que dista una manzana de su casa.

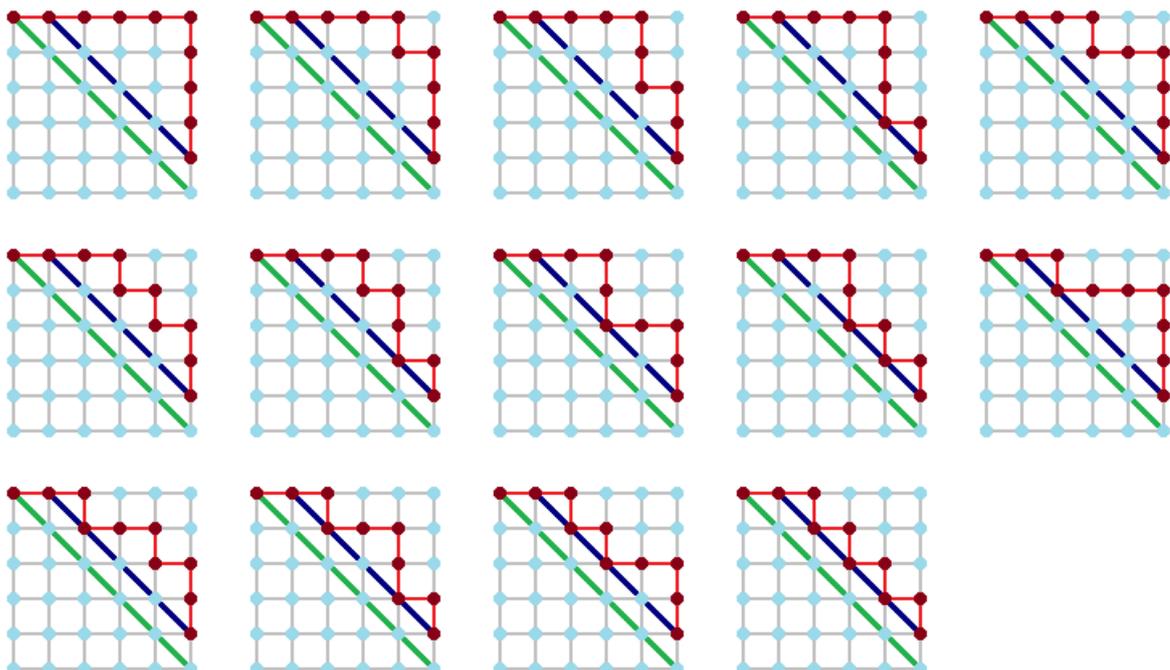
Antes de salir, Alberto y María se preguntan cuantas rutas en automóvil son posibles. Para ello consultan el desafío 53 del Club Pitagóricos, donde se daba la solución numérica para el caso de Alberto en Automóvil. Con ello confeccionan una tabla que cubre hasta 9 desplazamientos hacia el Este.

X \ Y	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1		1	2	3	4	5	6	7	8
2			2	5	9	14	20	27	35
3				5	14	28	48	75	110
4					14	42	90	165	275
5						42	132	297	572
6							132	429	1.001
7								429	1.430
8									1.430
9									

Recordemos el significado de esta tabla. En la cabecera de las columnas está el número X de manzanas que tienen que desplazarse hacia el Este para llegar a un cruce, y por filas tenemos el número Y de manzanas que tienen que desplazarse al Sur. En cada celda, se indican el número de caminos diferentes que se pueden tomar para llegar a la celda de coordenadas (X,Y).

Para su excursión nocturna, Alberto se tiene que fijar en la celda correspondiente a X=5 (desplazamiento hacia el Este) y Y=4 (desplazamiento al Sur). Esta está señalada con fondo azul y la tabla nos indica que disponen de 14 posibles caminos. María y Alberto deciden comprobarlo con lápiz y papel:

Los 14 posibles desplazamientos de 9 manzanas que puede efectuar Alberto en Automóvil terminando en una estación de Metro



El desafío.

El desafío en esta ocasión consiste en demostrar una fórmula para cualquier destino en Automóvil que disponga de estación de Metro. Para homogeneizar las soluciones, daremos esta fórmula en función de las manzanas que tengamos que recorrer hacia el Sur, desde la casa de Alberto y María, para llegar a la estación de Metro. A este número de desplazamientos al Sur lo llamaremos N. Para llegar ahí, habrá que recorrer además N+1 manzanas al Este, y por tanto un total de 2*N+1 manzanas.

Tened cuidado con esto: en esta tercera parte usamos la N con un significado diferente al que le dabamos en la primera y segunda parte.

Usaremos la variable **Cat** para proporcionar el resultado. **Cat** corresponde a las siglas de "Caminos en Automóvil para regresar en Transporte público".

Por tanto, para el caso del enunciado, donde se recorren 5 manzanas al Este y 4 al Sur:

- N = 4
- Cat(N) = Cat(4) = 14.

Para que no haya lugar a confusión, reescribimos los valores de la tabla que confeccionaron Alberto y María anteriormente en función de N. Se entiende que siempre respetamos las restricciones para Automóviles: desplazamientos a Este o Sur, y sin pasar nunca por la diagonal verde.

N	Cat(N)	Interpretación
1	1	Nº de caminos posibles para llegar al nodo 2 manzanas al Este y 1 al Sur
2	2	Nº de caminos posibles para llegar al nodo 3 manzanas al Este y 2 al Sur
3	5	Nº de caminos posibles para llegar al nodo 4 manzanas al Este y 3 al Sur
4	14	Nº de caminos posibles para llegar al nodo 5 manzanas al Este y 4 al Sur
5	42	Nº de caminos posibles para llegar al nodo 6 manzanas al Este y 5 al Sur
6	132	Nº de caminos posibles para llegar al nodo 7 manzanas al Este y 6 al Sur
7	429	Nº de caminos posibles para llegar al nodo 8 manzanas al Este y 7 al Sur
8	1.430	Nº de caminos posibles para llegar al nodo 9 manzanas al Este y 8 al Sur

El desafío consiste en demostrar que la fórmula para Cat(N) es la siguiente:

$$Cat(N) = \frac{(2N)!}{N!(N+1)!}$$

Es decir, no se trata de verificar que los valores 1, 2, 5, 14, 42, 132 ... se corresponden a esa fórmula, sino de deducir la fórmula para las condiciones del problema.

Por si estáis dudando, Alberto se sigue moviendo en las mismas restricciones que en la parte 1 del problema, por lo que las tablas con los caminos que llegan a cada cruce y las relaciones entre los números de caminos que llegan a cada cruce son las mismas. Lo que cambian son dos cosas:

- **El destino:** Lo que queremos contar es el número de caminos Cat(N) que puede realizar Alberto en automóvil terminando N manzanas al Sur y N+1 al Este de la estación de metro más cercana a su casa.
- **La nomenclatura:** Usamos la variable N con otro sentido.

Una pista: a algunos de vosotros la ciudad donde viven María y Alberto, con sus manzanas cuadradas y su diagonal, os habrán podido recordar a Barcelona. Sin embargo, no se trata de una ciudad catalana. En realidad, es una localidad belga.