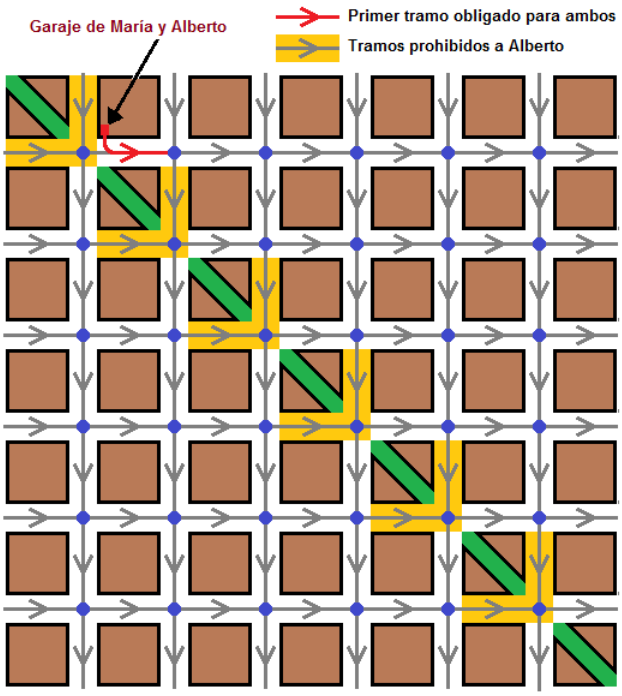
Desafío 60 - Circulando por la ciudad - Segunda parte.

La segunda parte de este problema consiste en realizar la demostración que quedo pendiente en la primera parte (desafío 53). Recordemos el planteamiento de aquel. Alberto y María viven en una ciudad con las siguientes restricciones los domingos:

- Las calles serán de sentido único **para todos los vehículos** (motos y automovíles): **sólo podrá circularse en sentido "Este" en las calles "horizontales" o en sentido "Sur" en las "verticales"**.

- La ciudad cuadriculada tiene una diagonal **peatonal** ajardinada, conocida como "**la diagonal verde**", que recorre la ciudad de noroeste a sureste. Los domingos, estará **prohibido a todos los automóviles el acceso a los tramos de calles que desembocan en un cruce con la diagonal**.

El garaje de la casa de María y Alberto tiene la salida en una calle que deja al Oeste un cruce con la diagonal. Por tanto, pueden salir de su casa los domingos en automóvil o moto, pero **la primera manzana la tendrán que recorrer obligatoriamente hacia el Este**. Este primer tramo obligado está **pintado en rojo en el plano**.



El desafío 53 consistía en calcular los caminos posibles para cada uno para el caso de que recorran N manzanas, siendo N un número para de 2 a 16, e incluyendo en la cuenta el tramo en rojo. Su solución era:

N Número de manzanas recorridas	**M=T(N)** Nº caminos que acaban en la diagonal (**M**aría en **M**oto)	**A=T(N)** Nº caminos que no vuelven a pasar por la diagonal (**A**lberto en **A**utomóvil)
2	1	1
4	3	3
6	10	10
8	35	35
10	126	126
12	462	462
14	1.716	1.716
16	6.435	6.435

Hemos llamado T(N) al número de caminos realizados, por María o por Alberto, para N manzanas. La pregunta es ¿qué fórmula proporciona esos valores?. ¿Cómo se demuestra?

La fórmula y la demostración para el caso de María os la recuerdo.

Para el caso de María, encontrar la fórmula que proporciona T(N) es relativamente sencillo y ya se comentó en diversas soluciones del desafío 53. Si María tiene que acabar en la diagonal, forzosamente tiene que realizar el mismo número de desplazamientos al Este y al Sur. Como no tiene prohibido atravesar la diagonal, puede hacerlos en cualquier orden, salvo el primer desplazamiento que es obligatoriamente al Este por las condiciones impuestas en el enunciado. Se trata por tanto de hallar cuantas "palabras" formadas por N/2 veces el carácter E, y N/2 veces el carácter S se pueden escribir, teniendo que empezar por E.

Podemos abordar esto de dos modos:

- Calcular las combinaciones de N desplazamientos donde N/2 son al Este y N/2 al Sur, y dividirlas entre dos para quedarnos solo con las que empiezan hacia el Este:

$$Combinaciones\left(N,\frac{N}{2}\right)=\frac{N!}{\left(\frac{N}{2}!\right)^2}$$

$$T(N)=\frac{1}{2}\,\frac{N!}{\left(\frac{N}{2}!\right)^2}$$

- Como el primer desplazamiento es obligatoriamente al Este, nos fijamos en los N-1 restantes. Se trataría de hallar cuantas combinaciones de N/2-1 desplazamientos al Este y N/2 al Sur se pueden dar:

$$T(N)=Combinaciones\left(N-1,\frac{N}{2}-1\right)=Combinaciones\left(N-1,\frac{N}{2}\right)=\frac{(N-1)!}{\left(\frac{N}{2}-1\right)!\left(\frac{N}{2}\right)!}$$

Operando un poco se puede comprobar que, como cabe esperar, las dos fórmulas son equivalentes. Y usando una hoja de cálculo, que proporciona los valores dados como solución en el desafío 53.

El desafío consiste en la demostración de la fórmula para el caso de Alberto.

La segunda parte del problema (y primera de este desafío) consiste en deducir que la fórmula de T(N) es válida, para todo N par, para el caso de Alberto.

La tercera parte del problema puede ayudar... o no.

Una vía, no la única, es apoyarse en los resultados de la tercera parte del problema (segunda de este mismo desafío 60). Para que no tengáis que rebuscar en el blog, os recuerdo como solucionamos algunos (no todos seguisteis ese camino) el desafío 53.

Se generaba una tabla donde cada celda estaba dada por dos coordenadas X,Y representando las manzanas recorridas hacia el Este y hacia el Sur desde el garaje de Alberto. El número en cada celda representaba el número de caminos que llegaban a un cruce, que resultaba ser suma de la celda a su izquierda (Oeste) y la celda superior (Norte). Las celdas de la diagonal roja representan los cruces separados 16 manzanas de la casa de Alberto, y su suma proporciona el valor T(16)=6435.

Y \ X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	#
2				2	5	9	14	20	27	35	44	54	65	77	90	#	#
3					5	14	28	48	75	110	154	208	273	350	#	#	#
4						14	42	90	165	275	429	637	910	#	#	#	#
5							42	132	297	572	1.001	1.638	#	#	#	#	#
6								132	429	1.001	2.002	#	#	#	#	#	#
7									429	1.430	#	#	#	#	#	#	#
8										#	#	#	#	#	#	#	#

Pues bien, en la tercera parte del problema se demuestra que los valores que aparecen inmediatamente encima de la diagonal:

1, 2, 5, 14, 42, 132, 429 ...

se pueden generar por esta fórmula:

$$Cat(K) = \frac{(2K)!}{K!\,(K+1)!}$$

donde empezaríamos a contar la K en el 1 que hay en la celda (2,1). Es decir:

Cat(1)=1, Cat(2)=2, Cat(3)=5, Cat(4)=14, Cat(5)=42, Cat(6)=132, Cat(7)=429

La demostración de la fórmula de Cat(K) es objeto de la tercera parte, no de esta. Pero es posible que os ayude a esta, independientemente de que consigáis o no dar resolver la tercera parte. Si procedéis así, prestad atención al "cambio de variable" entre las dos partes, pues la N significa una cosa en esta y otra en aquella.

Sin embargo, tengo que avisaros. Yo en mi solución, que tenía hecha antes de proponer el desafío 53, si uso este camino para demostrar la fórmula de T(N) para el caso de Alberto. Pero algunos me sorprendisteis entonces con planteamientos alternativos más prometedores, que os pedí que no se publicasen en aquella ocasión.

No os obligado por tanto usar los resultados de la tercera parte para solucionar la segunda. Ese ha sido mi camino, pero seguro que hay otros más directos.